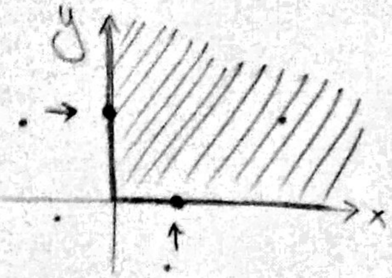
13/11/2018

ΑΠ3

Συνέχεια της χθεσινής παρατήρησης / παραδ.

Η $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x,y \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ είναι συνεχής (ως σταθερή) σε κάθε $(x_0,y_0) \in (0,\infty)$ και σε κάθε $(x_0,y_0) \in \mathbb{R} \setminus [0,\infty) \times [0,\infty)$ αλλά είναι <u>ασυνεχής</u> σε κάθε $(x_0,0)$, $x_0 \geq 0$ και κάθε $(0,y_0)$, $y_0 \geq 0$.



<u>π.χ.</u> • για $x_0 \geq 0$, επιλέγω $(x_\nu, y_\nu) = (x_0, -\frac{1}{\nu}) \to (x_0, 0)$

αλλά $f(x_\nu, y_\nu) = 0 \not\to 1$ και αντίστοιχα

• για $y_0 \geq 0$ επιλέγω $(x_\nu, y_\nu) = (-\frac{1}{\nu}, y_0) \to (0, y_0)$

αλλά $f(-\frac{1}{\nu}, y_0) = 0 \not\to 1 = f(0, y_0)$

<u>Προσοχή:</u> Η $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x,y \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

είναι συνεχής στο $\underbrace{[0,\infty) \times [0,\infty)}_{= A \subset \mathbb{R}^2}$;

(δηλ. ισχύει $\underline{\forall}(x_0,y_0) \in A$: f συνεχής στο (x_0,y_0) ;)

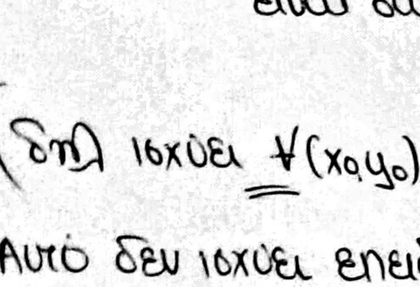
Αυτό δεν ισχύει επειδή:

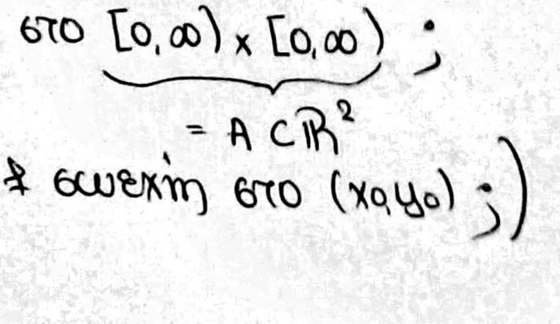
<u>π.χ.</u> $(1,0) \in A$. αλλά η f δεν είναι συνεχής στο $(1,0) \Rightarrow$
$(x_0, 0)$, $x_0 \geq 0$

$\Rightarrow$ Η f δεν είναι συνεχής στο $[0,\infty) \times [0,\infty)$

<u>ΟΜΩΣ</u>, αν θεωρήσω τον περιορισμό

$f|_A : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f|_A(x,y) = 1$ $\forall (x,y) \in A$.





Αν A ανοιχτό
f, $f|_A$ έχουν
την ίδια
συμπεριφορά

Αυτό συμβαίνει επειδή επιλέγουμε ακολουθίες, μόνο από το π.ο

Επανάληψη (1) $f: U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0$ σ.σ. του U, $\ell=\lim\limits_{\bar x\to\bar x_0}(f(\bar x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall (\bar x_\nu)\subset U\setminus\{\bar x_0\}$ με $\bar x_\nu\to\bar x_0$: $f(\bar x_\nu)\to\ell$

(2) $f:U\to\mathbb R$, $U\subset\mathbb R^n$, $\bar x_0\in U$, συνεχής στο $\bar x_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall(\bar x_\nu)\subset U$ με $\bar x_\nu\to\bar x_0$: $f(\bar x_\nu)\to f(\bar x_0) \Leftrightarrow |f(\bar x_\nu)-f(\bar x_0)|\to 0$

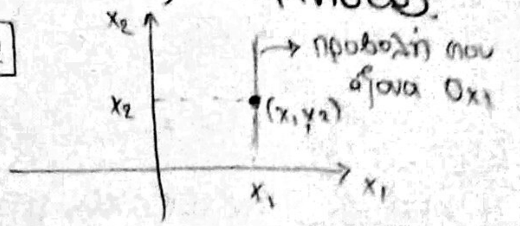
- $\boxed{n=1}$: $h:V\to\mathbb R$, $V\subset\mathbb R$, $y_0\in V$, συνεχής στο y_0

  $\Leftrightarrow \forall (y_\nu)\subset V$ με $y_\nu\to y_0$: $h(y_\nu)\to h(y_0)$

π.χ. Οι προβολές στους άξονες:

$f_i(\bar x)=f_i(x_1,\dots,x_n)=x_i$, $\bar x\in\mathbb R^n$ $\forall i=1,\dots,n$ είναι συνεχής συναρτήσεις.

$\boxed{n=2}$



π.χ. Έστω $\bar x_0=(x_0^{(1)},\dots,x_0^{(n)})\in\mathbb R^n$

και $\bar x_\nu=(x_\nu^{(1)},\dots,x_\nu^{(n)})\to\bar x_0$

Θνδο: $\forall i=1,\dots,n$: $\underbrace{f_i(\bar x_\nu)}_{=x_\nu^{(i)}} \xrightarrow{\nu} \underbrace{f_i(\bar x_0)}_{=x_0^{(i)}} \overset{\text{προτ.}}{\Longleftrightarrow} \forall i=1,\dots,n$: $x_\nu^{(i)}\to x_0^{(i)}$.

Πρόταση: Έστω $f,g: U\to\mathbb R$, $U\subset\mathbb R^m$, $\bar x_0\in\mathbb R^n$ σημ. συσσ. του U

και $\ell=\lim\limits_{\bar x\to\bar x_0} f(\bar x)$, $\lim\limits_{\bar x\to\bar x_0} g(\bar x)=m$. Το $\exists$ τα όρια:

(α) $\lim\limits_{\bar x\to\bar x_0}(f+g)(\bar x)=\ell+m$

(β) $\lim\limits_{\bar x\to\bar x_0}(fg)(\bar x)=\ell\cdot m$

(γ) $\lim\limits_{\bar x\to\bar x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(\bar x)=\frac{\ell}{m}$, αν $m\neq 0$.

Αποδ. Έστω $(\bar x_\nu)\subset U\setminus\{\bar x_0\}$ με $\bar x_\nu\to\bar x_0$

(α) Θνδο $(f+g)(\bar x_\nu)\to\ell+m$

$\overset{\text{ορ}}{=}\underbrace{f(\bar x_\nu)}_{\in\mathbb R}+\underbrace{g(\bar x_\nu)}_{\in\mathbb R}$

Γνωρίζω όμως ότι

αν $a_\nu \to a$ και $b_\nu \to b$, τότε $a_\nu + b_\nu \to a+b$

(αυτό ισχύει (Α.Λ.Ι.) στον $\mathbb{R}$, το δείξαμε όμως και στον $\mathbb{R}^n$)

(β) <u>Υπόδειξη</u>: $a_\nu \to a$, $b_\nu \to b \Rightarrow a_\nu b_\nu \to a b$.

(γ) $b \neq 0$, $a_\nu \to a$, $b_\nu \to b \Rightarrow \frac{a_\nu}{b_\nu} \to \frac{a}{b}$. //

<u>Πρόταση</u>. $f, g: U \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $\bar{x}_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$

Τότε $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ αν $g(\bar{x}_0) \neq 0$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $\bar{x}_0$.

<u>Αποδ</u>: Αντίστοιχα με την προηγούμενη. /

<u>Πρόταση</u>: <u>Σύνθεση συνεχών είναι συνεχής</u>!

δηλ. Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, συνεχής στο $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}$.

Επίσης, έστω $h: V \to \mathbb{R}$ με $f(U) \subset V \subset \mathbb{R}$, συνεχής στο $f(\bar{x}_0)$.

Τότε: $h \circ f: U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\bar{x}_0 \in U$

<u>Αποδ</u>: Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$

Έχουμε $\underbrace{f(\bar{x}_\nu)}_{\in f(U) \subset V} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \underbrace{f(\bar{x}_0)}_{\in V} \Rightarrow \underbrace{h(f(\bar{x}_\nu))}_{(h\circ f)(\bar{x}_\nu)} \to \underbrace{h(f(\bar{x}_0))}_{(h\circ f)(\bar{x}_0)}$ /

<u>Πρόταση</u>: $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell$ και $h: V \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\ell \in V$ (σημ. συσσ.) του V, όπου $f(U) \in V \Rightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} (h \circ f)(\bar{x}) = h(\ell)$

δεν είναι απαρ. να $\in$ στο U

<u>Αποδ</u>: Όπως πιο πάνω. /

Πορίσματα / Εφαρμογές

(A) $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell \Rightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} |f(\bar{x})| = |\ell|$

[αφού $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής]

Γενικότερα (SUPER-DUPER-SOS) !

$\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto \|\bar{x}\|$ είναι συνεχής (στο $\mathbb{R}^n$)

[$\Leftrightarrow f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$
$\Leftrightarrow f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$]

Έστω $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $(\bar{x}_\nu) \in \mathbb{R}^n$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$

Θ.δ.ο.: $\underbrace{\|\bar{x}_\nu\|}_{\in \mathbb{R}} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \underbrace{\|\bar{x}_0\|}_{\in \mathbb{R}}$ (δηλ. θ.δ.ο. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 \ \forall \nu \geq \nu_0 : \big| \|\bar{x}_\nu\| - \|\bar{x}_0\| \big| < \varepsilon$)

όμως, από τριγ. ανισ.: $0 \leq \big| \|\bar{x}_\nu\| - \|\bar{x}_0\| \big| \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0$.
θ. ισοσ.

(B) $a \in \mathbb{R}$ και $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell \Rightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} (af)(\bar{x}) = a\ell$

[αφού $\overset{\in \mathbb{R}^n}{\bar{x}} \mapsto a \in \mathbb{R}$ (η σταθερή συνάρτηση $f(\bar{x}) = a$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$)
είναι συνεχής ($|\underbrace{f(\bar{x}_\nu)}_{=a} - \underbrace{f(\bar{x}_0)}_{=a}| = 0$)]

(Γ) f συνεχής στο $\bar{x}_0 \Rightarrow |f|$ συνεχής στο $\bar{x}_0$ (σύνθεση συνεχών = συνεχής)

[(A) + $\boxed{f \text{ συνεχής στο } \bar{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)}$]

(Δ) f συνεχής στο $\bar{x}_0 \Rightarrow \sqrt{|f|}$ συνεχής στο $\bar{x}_0$

(Ε) $\underbrace{(x,y)}_{\in \mathbb{R}^n} \mapsto \underbrace{xy}_{\in \mathbb{R}}$ [$(x,y) \mapsto x$ και $(x,y) \mapsto y$ συνεχείς (προβολές!) + + πρόταση] (στ) $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)\mapsto$ πολυώνυμο του $\bar{x}$ (= αθροίσματα γινομένων προβολών.)

↳ π.χ.: $x_1^{26}\cdot x_n^{27}+x_2^{23}\cdot x_4 y_5 x_6 x_{19}$

[ΓΙΝΟΜΕΝΑ, ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ, ΠΗΛΙΚΑ ΣΥΝΕΧΩΝ → ΣΥΝΕΧΕΙΣ]

(ζ) $\bar{x}\mapsto \dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$ όπου f,g πολυώνυμα του $\bar{x}$ είναι συνεχής (ρητή συνάρτηση)

$\in \mathbb{R}^n/\{\bar{x}: g(\bar{x})=0\}$

Άσκηση 23 (Γ.Γ.)

Έστω η $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

νόρμα στο $\mathbb{R}^2$

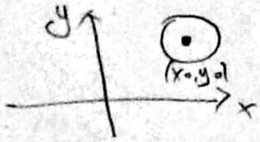
Δ.ο. (α) f συνεχής στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

(β) f συνεχής στο $(0,0)$ κατά μήκος κάθε ευθείας $y=ax$, $x\in\mathbb{R}$

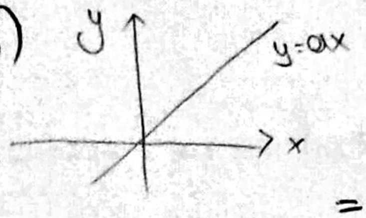
(δηλ. δ.ο. $\forall a\in\mathbb{R}$ η $y(x)=f(x,ax)$, $x\in\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $x=0$)

(γ) Η f είναι ασυνεχής στο $(0,0)$

Λύση: Ελέγχω εάν είναι καλά ορισμένη η f.

(α) 

[Αφού η f είναι σε όλο το $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ρητή (καλά ορισμένη) συνάρτηση είναι συνεχής.]

(β) 

Θνδο: Η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases} f(x,ax), & x\neq 0 \ (\Leftrightarrow (x,y)\neq(0,0))\\ f(0,0), & x=0\end{cases}$

$=\dfrac{a^2x^3}{(1+a^2)x^2}=\dfrac{a}{1+a^2}\cdot x$, $x\neq 0$. και 0: $x=0$.

Θνδο: Η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{a^2}{1+a^2}x$, $x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής (ως γραμμική)

(γ) Τι σημαίνει η f συνεχής στο $(0,0)$;

(β) →